Вестник ДГТУ, 2006. Т.6. №3(30) **ISBN 5-7890-0368-0**

МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.3

В.М. ДРАГИЛЕВ

О НЕВЯЗКЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В МЕТОДЕ ПРОЕКЦИЙ

В предшествующих работах для интегрального уравнения Фредгольма первого рода с вырожденным ядром развивалась обобщенная (не регуляризующая) версия метода проекций, основанная на произвольном выборе базиса в сочетании с некими априорными оценками для погрешности решения. Эти оценки зависят от невязки, которой ранее пренебрегали. Результаты настоящей работы позволяют учитывать невязку и показывают, что, вообще говоря, ее учет является существенным.

Ключевые слова: *интегральное уравнение Фредгольма первого рода, метод проекций, априорные оценки погрешности.*

Введение. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода с вырожденным ядром

(1)

где $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$; $u(x) = [Aq](x)$; $q(s) \in L_2[a,b]$ - искомая функция (оригинал); $\delta u(x)$ - погрешность исходных данных; $\varphi_m(x), \psi_m(s)$ - гладкие комплекснозначные функции; системы $\{\psi_m(s)\}_{m=1}^{M}$ и $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{M}$ линейно независимы на отрезках $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно.

Задача (1) некорректна и может решаться методом Тихонова [1]. В другом подходе, известном как метод проекций [2], в пространстве $L_2[a,b]$ вводится ортонормированный базис $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$, и обобщенное решение строится в виде

$$\tilde{q}_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n(s), \qquad (N \le M); \tag{2}$$

при этом коэффициенты ξ_n отыскиваются из условия минимизации невязки в пространстве $L_2[c,d]$. В канонической версии метода проекций базис образуют собственные функции (СФ) оператора $A^* A$, что делает метод регуляризующим [1, 2] и в неком смысле минимизирует погрешность решения [3]. На практике более удобной и достаточно эффективной [4] может оказаться обобщенная версия метода, в которой базис выбирается волевым образом.

Введем обозначения: H_N – линейная оболочка функций $\{f_n(s)\}_{n=1}^N$; P_N – проектор из $L_2[a,b]$ в H_N; $A_N = AP_N$; $q_N(s) = P_N q(s)$; $\eta_N = \|q - q_N\| / \|q\|$; $\Delta = \|\delta u\| / \|u\|$; для функций, определяемых на отрезке $[a,b]$ или $[c,d]$, символы $\|\cdot\|$ здесь и ниже означают норму в пространстве $L_2[a,b]$ или $L_2[c,d]$ соответственно (подобное же соглашение примем для символов скалярного произведения). Преимущества метода проекций связаны с возможностью оценить погрешность решения $\tilde{\eta}_N = \|\tilde{q}_N - q\| / \|q\|$ при априорно известных погрешностях η_N и Δ. А именно, справедлива оценка [3] $\tilde{\eta}_N \le \eta'_N + \eta''_N + \eta'_N \eta''_N$, где $\eta'_N = \|q - q'_N\| / \|q\|$, $\eta''_N = \|\tilde{q} - q'_N\| / \|q'\|$, $q'_N(s)$ - решение (2) задачи (1) с $\delta u = 0$ в правой части. Погрешность η'_N удовлетворяет оценкам [3]:

$$\eta_N \le \eta'_N \le \sqrt{1+\chi_N^2}\,\eta_N, \tag{3}$$

где χ_N - так называемая норма [3], зависящая от выбранного базиса; в каноническом методе проекций $\chi_N = 0$. Для погрешности η''_N имеется оценка [5, 6]

$$\eta''_N \le \gamma_N C_N \Delta, \tag{4}$$

где $\gamma_N = \|u\| / \|u'_N\|$; $u'_N = Aq'_N$; C_N - число обусловленности N - мерной матрицы B_N эрмитова оператора $A_N^* A_N : H_N \to H_N$ в базисе $\{f_n(s)\}_{n=1}^N$. Множитель γ_N рассматривается здесь как функционал от $q(s)$.

Для применения оценки (4) требуется при произвольно заданной величине η_N оценить сверху $\max\limits_{q(s)} \gamma_N$, что и является целью настоящей работы.

Основной интерес представляет случай $\eta_N \ll 1$, так как в противном случае восстановление оригинала с малой погрешностью $\tilde{\eta}_N \ll 1$ a priori исключается. При некоторых предположениях из оценки (3) и из непрерывности оператора A следует, что при $\eta_N \to 0$ обе функции $u(x), u'_N(x)$ близки к $[Aq_N](x)$, и в таком пределе $\gamma_N = 1$. Поэтому в первом приближении фактором γ_N в (4) пренебрегают [4], а оценивание этого функционала интерпретируется как учет невязки $\|u - u'_N\|$.

 ISBN 5-7890-0368-0

Основные соотношения. Будем предполагать, что матрица B_M наибольшей размерности $N = M$ не вырождена; тогда в силу так называемого принципа промежуточности [7] матрицы B_N размерностей $N < M$ тоже не вырождены. В этих условиях $\gamma_M = 1$ и $\gamma_N \geq 1$ при $N < M$, причем нижняя грань $\gamma_N = 1$ достигается для всех ненулевых оригиналов $q(s) \in H_N$ [6]. Представим γ_N в виде

$$\gamma_N = \gamma_N^{(1)} \gamma_N^{(2)}, \qquad (N < M), \tag{5}$$

где $\gamma_N^{(1)} = \|u\| / \|u_N\|$; $\gamma_N^{(2)} = \|u_N\| / \|u_N'\|$; $u_N(x) = [Aq_N](x)$.

Пусть $\{\Psi_n^N(s)\}_{n=1}^N$ есть ортонормированный набор СФ оператора $A_N^* A_N$, отвечающих его собственным значениям $\{(\sigma_n^N)^2\}_{n=1}^N$; где σ_n^N - так называемые сингулярные числа (СЧ), упорядоченные по убыванию: $\sigma_1^N \geq \sigma_2^N \geq \ldots \sigma_N^N > 0$. Обычным путем (см., например, [5]) устанавливается так называемое сингулярное разложение:

$$[A_N q](x) = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^N (\Psi_n^N, q) \Phi_n^N(x), \tag{6}$$

где $\Phi_n^N(x) = (\sigma_n^N)^{-1} [A_N^* \Psi_n^N](x)$ - функции, ортонормированные в $L_2[c,d]$. Учитывая, что $q_N(s) \in H_N$ и $q_N'(s) \in H_N$, при помощи разложения (6) получаем:

$$\|u_N\|^2 = \|A_N q_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^N)^2 \left|(\Psi_n^N, q_N)\right|^2; \tag{7}$$

$$\|u_N'\|^2 = \|A_N q_N'\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^N)^2 \left|(\Psi_n^N, q_N + \delta q_N')\right|^2, \tag{8}$$

где $\delta q_N'(s) = q_N'(s) - q_N(s)$. Отметим, что $C_N = \sigma_1^N / \sigma_N^N$.

Оценка для функционала $\gamma_N^{(1)}$. Введем обозначения: $\delta q_N(s) = q(s) - q_N(s)$; $\delta u_N(x) = [A\delta q_N](x)$; $Q_N = I - P_N$ - проектор из $L_2[a,b]$ в ортогональное дополнение $\overline{H}_N$ пространства H_N. Из (7) следует, что $\|u_N\| \geq \sigma_N^N \|q_N\|$. Кроме того, $\delta q_N(s) \in \overline{H}_N$ и поэтому $\|\delta u_N\| \leq \|AQ_N\| \|\delta q_N\|$. Воспользовавшись разложением

$u(x) = u_N(x) + \delta u_N(x)$, из неравенства треугольника и предыдущих двух неравенств получаем оценку для $\gamma_N^{(1)} = \|u\|/\|u_N\|$:

$$\gamma_N^{(1)} \le 1 + \tau_N \overline{\eta}_N, \qquad (N < M), \tag{9}$$

где $\tau_N = \|AQ_N\| / \sigma_N^N$, $\overline{\eta}_N = \|\delta q_N\|/\|q_N\| = \eta_N / \sqrt{1-\eta_N^2}$.

Отметим, что оценка (9) завышена не более чем в $\sqrt{2}$ раз. В самом деле, существуют, очевидно, функции $q_N(s)$, $\delta q_N(s)$, для которых $\|u_N\| = \sigma_N^N \|q_N\|$, $\|\delta u_N\| = \|AQ_N\| \|\delta q_N\|$. Поскольку знаки этих функций произвольны, оценка $\|u_N + \delta u_N\|^2 \le \|u_N\|^2 + \|\delta u_N\|^2 + 2|(u_N, \delta u_N)|$ для них не может быть априорно улучшена. Менее точная оценка $\|u_N + \delta u_N\|^2 \le (\|u_N\| + \|\delta u_N\|)^2$ для таких функций равносильна неравенству (9); в то же время она отличается от предыдущей оценки не более чем в два раза, что без труда проверяется при произвольных функциях $u_N(x)$, $\delta u_N(x)$.

Оценки для функционала $\gamma_N^{(2)}$**.** Обозначим $\rho_N = \chi_N \overline{\eta}_N$. Заметим, что

$$\eta_N'^{\,2} = \|(q_N' - q_N) + (q_N - q)\|^2 / \|q\|^2 = \|\delta q_N'\|^2 / \|q\|^2 + \eta_N^2 .$$

Отсюда и из (3) имеем $\|\delta q_N'\| \le \chi_N \|\delta q_N\|$ и, следовательно, $\|\delta q_N'\|/\|q_N\| \le \rho_N$. Из (6) вытекает, что если $q(s) \in H_N$, то тогда $\sigma_N^N \|q\| \le \|A_N q\| \le \sigma_1^N \|q\|$. Используя эти соотношения, получаем две очевидные цепочки неравенств:

$$\frac{1}{\gamma_N^{(2)}} = \frac{\|A_N(q_N + \delta q_N')\|}{\|A_N q_N\|} \ge \frac{\|A_N q_N\| - \|A_N \delta q_N'\|}{\|A_N q_N\|} \ge 1 - \frac{\sigma_1^N}{\sigma_N^N} \frac{\|\delta q_N'\|}{\|q_N\|} \ge 1 - C_N \rho_N;$$

$$\frac{1}{\gamma_N^{(2)}} = \frac{\|A_N(q_N + \delta q_N')\|}{\|A_N q_N\|} \ge \frac{\sigma_N^N \|q_N + \delta q_N'\|}{\sigma_1^N \|q_N\|} \ge \frac{1}{C_N} \frac{\|q_N\| - \|\delta q_N'\|}{\|q_N\|} \ge \frac{1 - \rho_N}{C_N}.$$

Таким образом, при не слишком больших значениях ρ_N справедливы оценки:

$$\gamma_N^{(2)} \le \frac{1}{1 - C_N \rho_N}, \qquad (C_N \rho_N < 1); \tag{10}$$

$$\gamma_N^{(2)} \le \frac{C_N}{1 - \rho_N}, \qquad (\rho_N < 1). \tag{11}$$

Оценка (9) в сочетании с любой из оценок (10), (11) дает искомую оценку для функционала γ_N (5). При $\rho_N \ge 1$ функционал $\gamma_N^{(2)}$, вообще

говоря, не является ограниченным сверху и может быть таковым лишь при неких специальных условиях. Подробный анализ случая $\rho_N \ge 1$ не представляет интереса, так как в приложениях величина $\overline{\eta}_N$ считается a priori много меньшей единицы, а норма χ_N должна быть меньше или порядка единицы (противное указывает на низкую эффективность проекционного метода и необходимость перейти к иной базисной системе [3]).

Обсудим далее ряд вопросов, касающихся практического применения полученных оценок (5), (9)-(11).

Интерпретация параметра τ_N и схема его численного расчета. Построим пример, в котором значения τ_N отыскиваются наиболее просто (все сопутствующие доказательства элементарны и для краткости опускаются). Пусть $\{\overline{\Psi}_m(s)\}_{m=1}^{M}$ есть ортонормированный набор СФ оператора A^*A, отвечающих его СЧ $\overline{\sigma}_1 \ge \overline{\sigma}_2 \ge \ldots \overline{\sigma}_M > 0$. В каноническом методе проекций базисные СФ должны быть упорядочены по убыванию СЧ [1, 2]. Рассмотрим версию проекционного алгоритма, в которой базисом $\{f_n(s)\}_{n=1}^{M}$ служат СФ, пронумерованные в ином порядке. При таком выборе базиса $\chi_N = 0$, как и в канонической версии, а множество всех СЧ σ_n^N, где $1 \le n \le N \le M$, совпадает с множеством $\{\overline{\sigma}_m\}_{m=1}^{M}$ (среди СЧ σ_n^N встречаются одинаковые). В частности, может оказаться, что перестановки не затрагивают СФ с номерами $n \le k$. В этом случае получим $\tau_N = \overline{\sigma}_{N+1} / \overline{\sigma}_N \le 1$ при всех $N < k$. Если же в набор $\{f_n(s)\}_{n=1}^{N}$ входят СФ $\overline{\Psi}_m(s)$ с номерами $m > N$, то тогда $\tau_N = \overline{\sigma}_k / \overline{\sigma}_n$, где k,n - некие числа, такие, что $k < n$; при этом $\tau_N \ge 1$. Отметим, что в данном примере $\gamma_N^{(2)} = 1$, а точная оценка для функционала $\gamma_N^{(1)}$ имеет вид $\gamma_N^{(1)} \le (1 + \tau_N^2 \overline{\eta}_N^2)^{1/2}$ (ее максимальное отличие от оценки (9) в $\sqrt{2}$ раз достигается при $\tau_N \overline{\eta}_N = 1$). В канонической версии метода проекций имеем $\tau_N \le 1$, что позволяет воспроизвести оценку из работы [6]:

$$\gamma_N = \gamma_N^{(1)} \le (1 + \overline{\eta}_N^2)^{1/2} = (1 - \eta_N^2)^{-1/2}.$$

Рассмотренный пример показывает, что в зависимости от свойств интегрального оператора и от выбранного базиса значения τ_N могут быть как сколь угодно малыми, так и сколь угодно большими. При $\tau_N >> 1$ учет фактора $\gamma_N^{(1)}$ становится необходимым и существенно ограничивает

допустимые значения погрешности η_N, при которых оценка (4) гарантирует малую погрешность η_N''.

Зависимость величин C_N, τ_N от базиса может вызвать вопросы по поводу их минимизации. Заметим, однако, что при заданных значениях Δ, $\gamma_N^{(1)}$ и при отсутствии какой-либо иной априорной информации никакой метод решения интегрального уравнения (1) не может гарантировать реконструкцию проекции $q_N(s)$ с относительной погрешностью меньшей, чем $\gamma_N^{(1)} C_N \Delta$. Последнее утверждение легко доказывается на основе разложения (6). Оно отчасти очевидно, так как согласно (6) при любом выборе базиса СЧ σ_n^N выступают весовыми коэффициентами, с которыми вклады от ортогональных проекций оригинала $q(s)$ входят в правую часть интегрального уравнения. Как было показано, в отсутствие дополнительной информации оценка (9) не может быть значительно улучшена. Следовательно, значения C_N, τ_N не характеризуют достоинства или недостатки выбранной версии проекционного алгоритма, а отражают принципиальные возможности реконструкции функций класса $q(s) \in H_N$ и функций, близких к элементам данного класса. (Единственной «мерой эффективности» проекционного метода, зависящей от базиса, является норма χ_N).

В завершение настоящего раздела укажем удобный прием для численных расчетов параметра τ_N. Воспользуемся тождеством $\|AQ_N\| = \|R_N\|^{1/2}$, где $R_N = (AQ_N)^* AQ_N$. Вычисляя норму оператора R_N, можно считать, что он действует в пространстве $\overline{H}_N$. Отсюда стандартным образом вытекает оценка

$$\|AQ_N\| \le \left(\sum_{m,n=N+1}^{\infty} |B_{mn}|^2 \right)^{1/4}, \tag{12}$$

где $B_{mn} = (f_m, R_N f_n)$. Входящую в (12) сумму ряда можно оценивать численно, заменив в ней бесконечный верхний предел обрезающим параметром.

Обозначим через $\sigma(N,K)$ наибольшее СЧ усеченной матрицы с элементами B_{mn} $(N+1 \le m,n \le K)$. Квадрат этого СЧ совпадает с нормой эрмитова оператора, получающегося из оператора R_N при сужении его области определения до $(K-N)$ - мерного подпространства,

натянутого на систему функций $\{f_n(s)\}_{n=N+1}^{K}$. Отсюда находим, что $\sigma^2(N,K) \le \|R_N\|$, или, что равносильно,

$$\sigma(N,K) \le \|AQ_N\|. \qquad (13)$$

По принципу промежуточности $\sigma(N,K+1) \ge \sigma(N,K)$, так что оценка (13) улучшается при увеличении K. Последовательное увеличение параметра K сопряжено с анализом плохо обусловленных матриц возрастающей размерности $K-N$. Но наличие двусторонней оценки (12), (13) позволяет прервать этот процесс уже при сравнительно небольших значениях K. Число членов, удержанных в частичной сумме ряда из правой части неравенства (12), может варьироваться независимо от K.

Интерпретация функционала $\gamma_N^{(2)}$. Множитель $\gamma_N^{(2)}$ в оценке (4), (5) дает особого рода поправку, связанную с погрешностью $\delta q'_N(s) = q'_N(s) - q_N(s)$. Эта погрешность возникает только при $\chi_N \ne 0$ и влияет на точность решений как непосредственно, так и косвенным образом, увеличивая относительную невязку и тем самым понижая устойчивость решений к входным погрешностям. К сожалению, при $C_N >> 1$ обе оценки (10), (11) сильно завышены, а получить в аналитическом виде более точные оценки не удается.

При практической постановке некорректных обратных задач часто приходится анализировать перспективы реконструкции, не располагая достаточной априорной информацией, в рамках неких качественных представлений, эвристических гипотез и т.п. Проекционный метод в основном как раз и предназначен для того, чтобы упростить и частично формализовать этот предварительный этап [4]. В связи с такими возможными приложениями обратим внимание на некоторые качественные свойства функционала $\gamma_N^{(2)}$.

Заметим, что $\delta q'_N(s) = D_N \delta q_N(s)$, где $D_N : \overline{H}_N \to H_N$ - некий линейный оператор [3]. Допустим, что оператор D_N отображает пространство $\overline{H}_N$ во все пространство H_N (это, как правило, выполняется, так как $\dim H_N < \dim \overline{H}_N = \infty$). Тогда ввиду произвольности функции $q(s)$ и ее проекции $\delta q_N(s)$ функцию $\delta q'_N(s)$ можно рассматривать как произвольный элемент пространства H_N. Функции $q_N(s)$ и $\delta q'_N(s)$ друг с другом никак не связаны, не считая ограничения $\|\delta q'_N\| / \|q_N\| \le \rho_N$. Далее предполагаем, что $\rho_N << 1$. Из (7), (8) вытекает, что при таком условии большие значения $\gamma_N^{(2)} >> 1$ достигаются только при $C_N >> 1$ и при одновременном выполнении следующих требо-

ваний: во-первых, функция $q_N(s)$ должна быть квазиортогональна тем функциям $\Psi_n^N(s)$, которые имеют малые номера n, т.е. отвечают большим СЧ σ_n^N; во-вторых, члены с такими номерами n должны, однако, доминировать в сумме (7); наконец, между функциями $\delta q'_N(s)$ и $q_N(s)$ (элементами векторного пространства H_N) должна существовать определенная корреляция, при которой для указанных n выполнялись бы соотношения $\left|(\Psi_n^N, q_N + \delta q'_N)\right| << \left|(\Psi_n^N, q_N)\right|$. При введении некоторых гипотез о случайном выборе функций $q_N(s)$, $\delta q'_N(s)$ большие отклонения фактора $\gamma_N^{(2)}$ от единицы будут маловероятны. Это означает, что на стадии эвристических прогнозов множителем $\gamma_N^{(2)}$ в оценке (4) можно попросту пренебречь. При непосредственном решении обратной задачи оценку (4) можно заменить апостериорными оценками [6], не содержащими функционала γ_N.

Проиллюстрируем свойства функционала $\gamma_N^{(2)}$ результатами численного эксперимента в духе метода Монте-Карло. Эксперимент был проведен при значениях $N = 5$; $\sigma_n^N = 10^{-n}$, где $n = 1,2,\ldots,N$; $\rho_N = 0{,}1 - 0{,}3$. Функции $q_N(x)$, $\delta q'_N(x)$ моделировались двумя независимыми случайными N - мерными векторами, ориентация которых отвечает равномерному распределению в N - мерном кубе с центром в начале координат. Векторы нормировались из условия, что отношение $\|\delta q'_N\| / \|q_N\|$ есть случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, \rho_N]$. Определялись относительные частоты ω_i наступления событий «$\gamma_N^{(2)} > h_i$», где $i = 1,2,3$, $h_1 = 1.5$, $h_2 = 2$, $h_3 = 2.5$. В приведенной ниже таблице для каждой относительной частоты указан максимальный разброс ее значений, наблюдавшихся в 10 сериях из 10000 испытаний.

Значения относительных частот ω_i при различных значениях ρ_N

ρ_N	ω_1	ω_2	ω_3
0.1	0.0073 - 0.0103	0.0016 - 0.0026	0.0004 - 0.0015
0.2	0.0329 - 0.0411	0.0102 - 0.0130	0.0045 - 0.0067
0.3	0.0642 - 0.0717	0.0241 - 0.0277	0.0119 - 0.0162

Выводы. Недостающая оценка для функционала γ_N получена путем его факторизации на множители $\gamma_N^{(1)}$, $\gamma_N^{(2)}$. Анализ множителя $\gamma_N^{(1)}$ приводит к введению параметра τ_N, который наряду с числом обусловленности определяет устойчивость решений к входным погрешностям. Множитель $\gamma_N^{(2)}$ отражает возможность резкого возрастания относительной невязки интегрального уравнения при некой специфической корреляции между ортогональными проекциями функции-оригинала. При априорном исследовании возможностей реконструкции фактор $\gamma_N^{(2)}$ в порядке упрощающей гипотезы может игнорироваться.

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 206 с.
3. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. О применении метода проекций в обратной граничной задаче для упругого слоя // Вестник ДГТУ. – Т. 4. – № 3. – 2004. – С. 282-289.
4. Ватульян А.О., Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акустический журнал. – 2001. – Т.47. – № 6. – С. 829-834.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
6. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Некоторые оценки погрешности в методе проекций для интегральных уравнений первого рода с вырожденным ядром // Вестник ДГТУ. – 2006. – Т. 6. – № 1. – С. 3-9.
7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 381 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.06.

V.M. DRAGILEV

ON THE INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND RESIDUAL IN THE PROJECTION METHOD

In the previous papers for the integral Fredgholm equation of the first kind with a degenerate kernel the generalized (non regularizing) version of the projection method was developed, based on the arbitrary choice of the basis combined with some a priori estimations for the error of the solution. These estimations depend on the residual which was neglected earlier. The results of the present paper admit to take the residual into account and show that, generally speaking, this accounting is essential.

ДРАГИЛЕВ Владимир Михайлович (р. 1955), доцент кафедры математики ДГТУ, кандидат физико-математических наук. Окончил РГУ (1978).
E-mail: vdragil@mail.ru.
Научные интересы: линейная теория волн, некорректные задачи математической физики.
Автор 26 научных работ.